



ZASTOSOWANIE MAX-PLUS ALGEBRY W MODELOWANIU I ANALIZIE EFEKTYWNOŚCI SYSTEMÓW PRODUKCYJNYCH

Jarosław Stańczyk

Katedra Genetyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

Autor korespondencyjny:

Jarosław Stańczyk

Katedra Genetyki

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

ul. Kozuchowska 7, 51-631 Wrocław, Polska

telefon: +48 71 77 40 158

e-mail: jaroslaw.stanczyk@upwr.edu.pl

SŁOWA KLUCZOWE

dyskretne systemy zdarzeniowe, max-plus algebra, analiza efektywności

MAX-PLUS ALGEBRA APPLICATION FOR PRODUCTION SYSTEMS MODELLING AND PERFORMANCE EVALUATION

KEYWORDS

discrete event systems, max-plus algebra, performance evaluation

ABSTRACT

In response to increased competition, manufacturing systems are becoming more complex in order to provide the flexibility and responsiveness required by the market. The increased complexity requires decision support tools that can provide insight into the effect of system changes on performance in an efficient and timely manner.

This contribution discusses the usefulness of $(\max, +)$ algebra as a mathematical framework for a class of production systems. The class can be described as a dynamic and asynchronous where the state transitions are initiated by events that occur at discrete instants of time. An event corresponds to the start or the end of an activity. A common property of such examples is that the start of an activity depends on termination of several other activities. Such systems are known as discrete event systems (DES).

In the paper an overview of the modeling and analysis concepts of the $(\max, +)$ algebra approach for DES is given. Also, an application examples from manufacturing systems are provided to illustrate the potential of this approach. Considered systems have been represented as $(\max, +)$ algebraic state space models. How to model different basic manufacturing systems depends on production type, like serial line, assembly line, etc. as well as impact of capacity of interoperable buffers have been presented. Based on an analytical model, effectiveness evaluation or performance indexes have been calculated for different configurations of the same production system. So, finally the best solution, for given criteria, has been obtained.

All exemplary calculations have been made using the Max-Plus Algebra Toolbox for Matlab, the software package developed by author and available on his homepage.

1. Wstęp

Wiele zjawisk obserwowanych w systemach produkcyjnych, sieciach telekomunikacyjnych czy systemach transportowych można opisać za pomocą tzw. *dyskretnych systemów zdarzeniowych* (ang. *discrete event systems*, DES). Nazywanych również, dla podkreślenia ich dynamicznego charakteru, *dyskretnymi dynamicznymi systemami zdarzeniowymi*.

Są to systemy wykonane przez człowieka, które składają się ze skończonej liczby *zasobów* (np. maszyn produkcyjnych, buforów, kanałów komunikacyjnych etc.), które są dzielone poprzez skończoną liczbę *procesów* (np. zadań, typów produktów, pakietów informacji etc.) współpracujących lub konkurujących, by osiągnąć cel (np. końcowy produkt, transmisję, obliczenia w rozproszonym systemie komputerowym etc.).

DES są systemami dynamicznymi, w których przejście z jednego stanu do innego jest wywołane poprzez *zdarzenie* występujące w pewnej dyskretnej chwili czasowej. Zdarzeniu odpowiada rozpoczęcie lub zakończenie jakiegoś działania, rozważając procesy produkcyjne może to być rozpoczęcie lub zakończenie operacji technologicznej, wypełnienie bufora międzyoperacyjnego etc. Wspólną cechą rozważanych systemów jest to, iż rozpoczęcie nowego zdarzenia zależy od zakończenia szeregu innych zdarzeń. Tego rodzaju systemy nie dają się opisywać równaniami różniczkowymi czy różnicowymi. Dodatkowo, ze względu na realizację określonej ilości wyrobów, charakteryzują się zachowaniem cyklicznym. Dynamika DES charakteryzowana jest poprzez dwa zjawiska: *synchronizację* i *współbieżność*:

- *synchronizacja* polega na doprowadzeniu dwóch lub więcej procesów do zgodności w czasie;

- *współbieżność* oznacza równoczesne użytkowanie systemu przez kilka procesów, co prowadzi do zjawiska konkurowania o dostęp do zasobów.

Istnieje wiele narzędzi i technik używanych w badaniach nad DES – wprowadzenie oraz przegląd można znaleźć np. w [2]. Najczęściej stosowaną techniką jest symulacja komputerowa. Zasadniczą niedogodnością symulacji polega na tym, że nie pozwala ona dostatecznie zrozumieć wpływu poszczególnych parametrów systemu na jego podstawowe własności, takie jak stabilność, odporność na zakłócenia czy efektywność funkcjonowania. Techniki analityczne dają pod tym względem lepsze wyniki, stąd są one preferowane jako narzędzia do modelowania czy analizy DES. W teorii DES aktualnie można wyróżnić trzy zasadnicze nurty:

- *logiczny* – w którym rozważane są możliwości wystąpienia pewnych zdarzeń lub ich brak, ale nie jest brany pod uwagę czas ich występowania, głównymi kierunkami tego podejścia są teoria automatów [13] oraz sieci Petriego [12];
- *deterministyczny* – zajmujący się *efektywnością funkcjonowania* DES (poprzez analizę wystąpień zdarzeń w czasie), w tym podejściu najczęstszymi stosowanymi metodami są czasowe sieci Petriego i $(\max, +)$ algebra [6];
- *stochastyczny* – używany, gdy znane są pewne statystyczne charakterystyki systemu, np. procesy Markowa [8], teoria kolejek [5] czy symulacje komputerowe.

W niniejszej pracy rozważane są problemy modelowania i analizy pewnej klasy DES przy użyciu $(\max, +)$ algebry. Rozważana klasa DES jest ograniczona do takich systemów, których modele są $(\max, +)$ -liniowe i stacjonarne, tzn. są to systemy deterministyczne, w których w realizowanym procesie nie ma możliwości wyboru zasobu. Przykładami takich systemów są między innymi: systemy produkcyjne [14], transportowe [16], wsadowe procesy chemiczne [10] itd.

Wszelkich eksperymentów obliczeniowych dla potrzeb niniejszej publikacji dokonano przy użyciu pakietu *Max-Plus Algebra Toolbox for Matlab* [15].

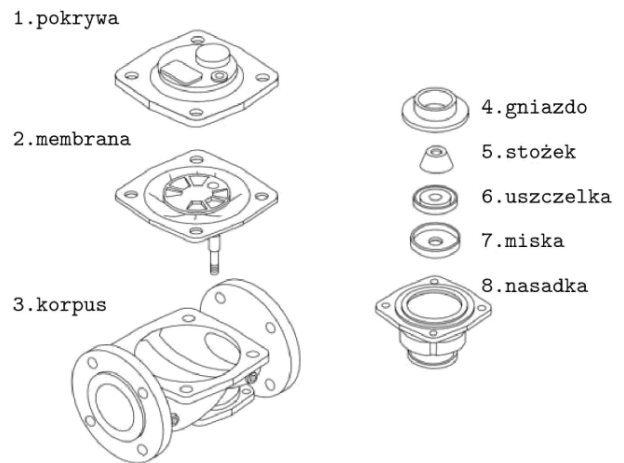
2. Analiza przypadku: linia montażowa

Rozważmy linię montażową pewnego rodzaju zwrotnych zaworów regulujących [4]. Każdy zawór składa się z części przedstawionych na rysunku 1.

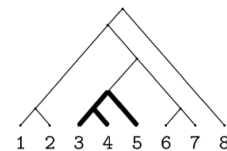
Drzewo operacji montażowych przedstawia rysunek 2. W drzewie tym, poszczególne cyfry u dołu rysunku oznaczają numery detali wejściowych, zaś każdy z węzłów drzewa oznacza niezależną operację montażu. W wyróżnionym fragmencie rysunku 2. montaż detali nr 3 i 4 musi odbyć się zanim domontowany zostanie detal nr 5 itd.

Przełożenie sekwencji montażowej definiowanej poprzez drzewo na możliwe konfiguracje rzeczywistej linii produkcyjnej zależy od wielu czynników, takich jak np.

dostępne miejsce, dostępna ilość pracowników, narzędzia wymagane do wykonania danej operacji etc. Realizowane jest to poprzez odpowiednie techniki planowania produkcji.

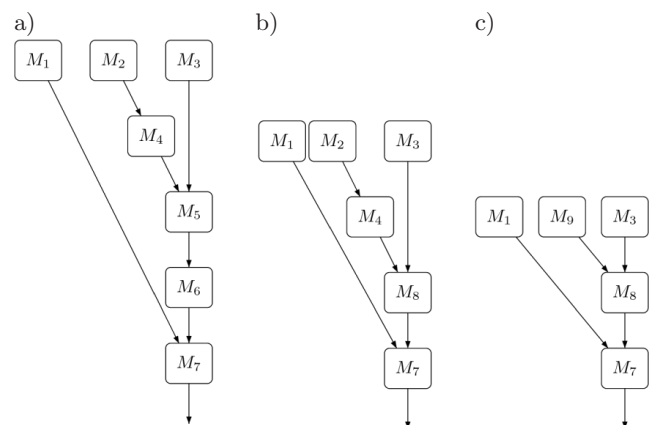


Rys. 1. Elementy zaworu



Rys. 2. Drzewo operacji montażowych (na podstawie [7])

Założmy, że na etapie planowania produkcji uzyskano 3 potencjalne, możliwe konfiguracje linii montażowej. Przedstawiono je na rysunku 3. Opis poszczególnych operacji wraz z czasami realizacji przedstawia tabela 1.



Rys. 3. Trzy możliwe konfiguracje linii montażowej

W poszczególnych konfiguracjach, stacja montażowa o tym samym numerze, wykonuje dokładnie te same operacje i z takimi samymi czasami operacji. Różnice pomiędzy konfiguracjami sprowadzają się do połączenia wybranych operacji. Ponieważ poszczególne konfiguracje są podobne, problem sprowadza się do wyboru optymalnej w sensie przyjętego kryterium.

Tab. 1. Lista operacji montażu zaworu

stanowisko	opis operacji	użyte części	czas
M_1	montaż pokrywy i membrany	(1, 2)	$d_1 = 43$
M_2	montaż korpusu i gniazda	(3, 4)	$d_2 = 20$
M_3	montaż miski i uszczelki	(6, 7)	$d_3 = 15$
M_4	montaż stożka do detalu ze stanowiska M_2	((3, 4), 5)	$d_4 = 6$
M_5	montaż detalu z M_3 z detalem z M_4	((3, 4, 5), (6, 7))	$d_5 = 18$
M_6	dobudowanie nasadki do detalu z M_5	((3, 4, 5, 6, 7), 8)	$d_6 = 5$
M_7	montaż detali z M_1 i M_6	((3, 4, 5, 6, 7, 8), (1, 2))	$d_7 = 21$
M_8	montaż nasadki wraz z detalami z M_3 i M_4 (w miejsce M_5 i M_6)	((3, 4, 5), (6, 7), 8)	$d_8 = 25$
M_9	montaż korpusu, gniazda i stożka (w miejsce M_2 i M_4)	(3, 4, 5)	$d_9 = 28$

2.1. Sformułowanie problemu

Rozważając zbiór podanych, dozwolonych konfiguracji systemu produkcyjnego, takich jak np. przedstawione na rysunku 3., problem sformułowano następująco: **spośród dozwolonych konfiguracji wybrać konfigurację optymalną, w sensie przyjętego kryterium.**

Do analizy powyższego problemu przyjęto, jako przykładowe kryterium, najszybszą realizację zamówienia składającego się z n sztuk. Przedstawiono również rozwiązanie dla najkrótszego czasu przestoju maszyn. Można oczywiście definiować i inne kryteria oraz ograniczenia, np. dotyczące pojemności buforów międzystanowiskowych. Formalnie poszczególne kryteria zdefiniowane zostały w rozdziale 5.

3. Max-plus algebra

Jako pierwszą publikację dotyczącą $(\max, +)$ algebry wskazuje się [3]. Standardową pozycją jest [1], a krótki przegląd metod i zastosowań można znaleźć w [6]. Pod pewnymi względami $(\max, +)$ algebra jest porównywalna z algebrą konwencjonalną. W algebrze $(\max, +)$ operatory dodawania (+) i mnożenia (\otimes) z konwencjonalnej algebry zostały zastąpione odpowiednio poprzez operatory maksymalizacji (\oplus) i dodawania (+). Dzięki temu, uzyskuje się liniowy opis, w sensie $(\max, +)$ algebry, pewnych klas nieliniowych w konwencjonalnej algebrze systemów.

W ciągu ostatnich lat teoria dotycząca $(\max, +)$ algebry i jej zastosowań jest stale rozwijana, wystarczy choćby wymienić kilka kierunków: sterowanie optymalne [9], sterowanie predykcyjne [17], modelowanie i planowanie produkcji [11, 14] etc.

3.1. Podstawy

Struktura algebraiczna zdefiniowana w zbiorze liczb rzeczywistych wraz z $-\infty$, tzn. $\mathbb{R}\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, w której zdefiniowane są dwa działania:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}\varepsilon: a \otimes b \equiv a + b;$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}\varepsilon: a \oplus b \equiv \max(a, b);$

jest nazywana *max-plus algebrą* i oznaczana jako $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}\varepsilon, \otimes, \oplus)$. W publikacji przyjęto notację prezentowaną w [1], w której $\varepsilon = -\infty$ i $e = 0$. Notacja ε i e zamiast odpowiednio $-\infty$ i 0 jest używana dla odróżnie-

nia specjalnego znaczenia tych wartości, jak również po to, aby uniknąć pomyłek wynikających z ich roli w algebrze konwencjonalnej. W niniejszej publikacji używany jest zapis ab zamiast $a \otimes b$ wszędzie tam, gdzie nie powoduje on dwuznaczności. Poniżej rozszerzono działania w $(\max, +)$ algebrze o operacje na macierzach.

Dodawanie macierzy: niech dane będą dwie macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}\varepsilon^{m \times n}$. Macierz $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \in \mathbb{R}\varepsilon^{m \times n}$ otrzymywana jest przez dodanie odpowiednich elementów, tzn.:

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} \oplus (\mathbf{B})_{ij}, \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Mnożenie macierzy: niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}\varepsilon^{m \times p}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}\varepsilon^{p \times n}$, wtedy iloczyn $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \in \mathbb{R}\varepsilon^{m \times n}$, gdzie $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ij}$ jest produktem i -tego wiersza \mathbf{A} i j -tej kolumny \mathbf{B} , czyli:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p (\mathbf{A})_{ik} \otimes (\mathbf{B})_{kj} \equiv \max_k ((\mathbf{A})_{ik} + (\mathbf{B})_{kj}), \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

gdzie: $\bigoplus_{j=1}^m a_j$ jest skróconym zapisem $a_1 \oplus \dots \oplus a_m$.

Macierz $\varepsilon \in \mathbb{R}\varepsilon^{m \times n}$, z $(\varepsilon)_{ij}$ dla wszystkich i, j jest macierzą zerową. Kwadratowa macierz $\mathbf{I} \in \mathbb{R}\varepsilon^{n \times n}$ z e na głównej przekątnej oraz ε na pozostałych miejscach jest nazywana macierzą jednostkową lub identycznościową. Operator $*$ jest zdefiniowany dla kwadratowej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}\varepsilon^{n \times n}$:

$$\mathbf{A}^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k, \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^{k-1}$, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, \mathbb{N}_0 – zbiór nieujemnych liczb całkowitych. Operator ten jest zdefiniowany tylko wówczas, gdy prawa strona równania (3) jest zbieżna [3]. Operator $*$ będzie przydatny w dalszej części, gdyż dzięki niemu uzyskuje się rozwiązanie równania, w którym \mathbf{x} jest uwikłane po obu stronach, tzn.:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \oplus \mathbf{b}, \quad (4)$$

wówczas:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\mathbf{b}. \quad (5)$$

Dowód można znaleźć np. w [1].

3.2. Modelowanie DES

Jednym z najbardziej znanych równań systemów dynamicznych jest:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1), \quad t = 1, 2, \dots \quad (6)$$

gdzie wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje *stan* rozważanego systemu, macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest *macierzą systemu*. Jeśli znane są warunki początkowe, tzn. $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, to zachowanie systemu jest w pełni zdeterminowane. Równanie (6) zapisane w notacji $(\max, +)$, tzn. gdy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, przedstawia się następująco:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{x}(k-1). \quad (7)$$

Celowo w równaniu (7) zamiast t występuje k , gdyż nie oznacza ono czasu pojawienia się zdarzenia, lecz numer cyklu (iteracji), w którym zdarzenie ma miejsce.

Stacjonarny model $(\max, +)$ -liniowy 1-go rzędu, wiążący wejścia i wyjścia systemu jest uogólnieniem (7): $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) \oplus \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{D}\mathbf{u}(k). \quad (9)$$

Poszczególne elementy to: *wektor wejść* (wektor sterujący) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, *macierz wejścia* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, *wektor wyjść* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *macierz wyjścia* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i *macierz sprzężenia bezpośredniego* $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$.

W ogólnym przypadku, dla systemu N -tego rzędu, tzn. takiego, w którym N poprzednich iteracji wpływa na bieżące zachowanie systemu, z uwikłanym $\mathbf{x}(k)$ po obu stronach równania stanu, model przedstawia układ równań (10) i (11):

$\forall k \in \mathbb{N}$:

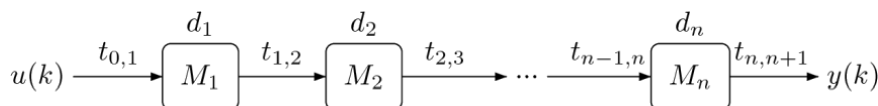
$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{i=0}^N \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k-i) \oplus \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k-i), \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(k) = \bigoplus_{i=0}^{N-1} (\mathbf{C}_i \mathbf{x}(k-i) \oplus \mathbf{D}_i \mathbf{u}(k-i)). \quad (11)$$

Po usunięciu $\mathbf{x}(k)$ z prawej strony równania (10) (zakładając, że \mathbf{A}_0^* jest zbieżne) i wprowadzeniu nowych wektorów $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k-1)\dots\mathbf{x}(k-N+1)]^T$ i $\tilde{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}(k)\mathbf{u}(k-1)\dots\mathbf{u}(k-N+1)]^T$ oraz zdefiniowaniu macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^* \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0^* \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_0^* \mathbf{A}_n \\ \mathbf{I} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{I} & & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_{N-1} \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix},$$



Rys. 4. Sekwencyjna linia produkcyjna z szeregiem n stanowisk

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_0 \dots \mathbf{C}_{N-1}], \quad \mathbf{D} = [\mathbf{D}_0 \dots \mathbf{D}_{N-1}],$$

gdzie \mathbf{I} i ε są odpowiedniego rozmiaru $(\max, +)$ -algebraicznymi macierzami jednostkową i zerową, uzyskany zostaje model 1-go rzędu, opisany równaniami (8) i (9). W dalszej części pracy człon $\mathbf{D}\mathbf{u}(k)$ w równaniu (9) jest pomijany, a równanie wyjścia przybiera postać:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \quad (12)$$

4. Modelowanie systemów produkcyjnych

Zanim powrócimy do systemu produkcyjnego opisanego w rozdziale 2., zajmijmy się modelowaniem poszczególnych fragmentów systemów produkcyjnych. Następnie fragmenty te zostaną złożone. Modelowanie prostych fragmentów potrzebne jest, aby nabyć intuicji i doświadczenia potrzebnych do modelowania systemów bardziej rozbudowanych. Zaczniemy od sekwencyjnej linii produkcyjnej, tzn. od linii, w której poszczególne stanowiska produkcyjne połączone są w szereg. Dalej przejdziemy do modelowania linii montażowej, do której wpływają podzespoły z kilku stanowisk. Na zakończenie zajmijmy się modelowaniem pojemności buforów międzyoperacyjnych.

4.1. Modelowanie przepływu szeregowego

Rozważmy linię produkcyjną z szeregiem n stanowisk, przedstawioną na rysunku 4. Z linią powiązany jest bufor wejściowy (magazyn), nazwijmy go u , z którego pobierane są detale. Tego rodzaju linia ma jedno stanowisko wejściowe, tzn. takie, do którego trafiają detale z magazynu wejściowego, oraz jedno stanowisko wyjściowe, tzn. takie, z którego gotowy produkt (czy półprodukt) opuszcza linię. Produkt opuszczający linię trafia do magazynu wyjściowego (końcowego) y .

Niech $u(k)$, $y(k)$ oraz $x_i(k)$ oznaczają odpowiednio czas, w którym k -ty detal jest dostępny na wejściu na linię produkcyjną (tzn. jest w magazynie wejściowym), wyjściu (tzn. jest w magazynie końcowym) oraz na stanowisku M_i . Jeśli materiał trafia do systemu w k -tej iteracji (tzn. w czasie $u(k)$), wówczas jest on dostępny na stanowisku M_1 w czasie $t = u(k) + t_{0,1}$, gdzie $t_{0,1}$ jest czasem transportu elementu z magazynu wejściowego do stanowiska M_1 . Jednak na M_1 można rozpocząć obrabiać ten element tylko wówczas, gdy zakończono już pracę nad poprzednim detalem, tzn. nad detalem z iteracji $k-1$. Zakładając, że czas operacji na stanowisku M_1 wynosi d_1 , wówczas detal z iteracji $k-1$ opuści stanowisko M_1 w czasie

$t = x_1(k - 1) + d_1$. Zakładamy, że detal opuści stanowisko natychmiast po zakończeniu operacji oraz zostanie poddany obróbce natychmiast, gdy tylko będzie na danym stanowisku dostępny. Powyższe warunki można przełożyć na następujące równanie opisujące czas, w którym zacznie się obróbka k -tego detalu na stanowisku M_1 :

$$\forall k \in \mathbb{N} : x_1(k) = \max(d_1 + x_1(k - 1), t_{0,1} + u(k)), \quad (13)$$

w $(\max, +)$ algebrze przedstawia się to następująco:

$$\forall k \in \mathbb{N} : x_1(k) = d_1 x_1(k - 1) \oplus t_{0,1} u(k). \quad (14)$$

Podobnie dla stanowiska M_i , k -ty detal zacznie być obrabiany na tym stanowisku, gdy:

- zakończy się obróbka detalu na stanowisku M_{i-1} i zostanie on dostarczony do M_i (czas transportu wynosi $t_{i-1,i}$),
- na M_i zakończy się obróbka $k - 1$ -go detalu.

W $(\max, +)$ algebrze wyraża się to następująco:

$$\forall k \in \mathbb{N} : x_i(k) = t_{i-1,i} d_{i-1} x_{i-1}(k) \oplus d_i x_i(k - 1). \quad (15)$$

Scalając powyższe równania w zapisie macierzowym:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k - 1) \oplus \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(k), \quad (16)$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ t_{1,2}d_1 & \varepsilon & t_{1,2}d_1 & \varepsilon \\ & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & t_{n-1,n}d_{n-1} & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} t_{0,1} \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}(k) = [u(k)].$$

Wprowadzając operator $*$, równanie (16) można zapisać jako:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0^* \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k - 1) \oplus \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(k), \quad (17)$$

co następnie można skrócić do (8), gdzie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0^* \mathbf{A}_1 =$$

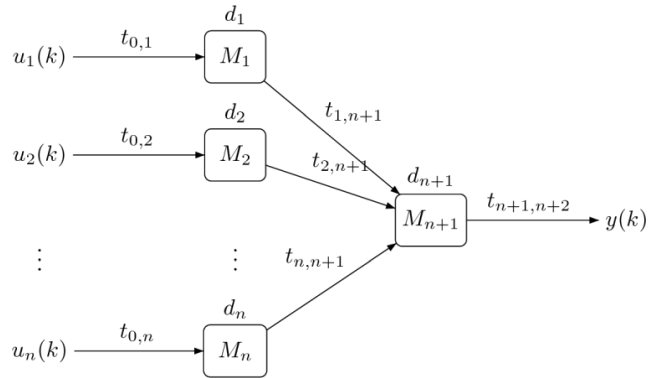
$$\begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ t_{1,2}d_1^2 & d_2 & & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{1,2}d_1^2 t_{2,3}d_2 \cdots t_{n-1,n}d_{n-1} & t_{2,3}d_2^2 \cdots t_{n-1,n}d_{n-1} & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} t_{0,1} \\ t_{0,1}t_{1,2}d_1 \\ \vdots \\ t_{0,1}t_{1,2}d_1 t_{2,3}d_2 \cdots t_{n-1,n}d_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Wyjście linii produkcyjnej opisane jest równaniem (12), z $\mathbf{y}(k) = [y(k)]$, $\mathbf{C} = [\varepsilon \ \dots \ \varepsilon \ t_{n,n+1}d_n]$.

4.2. Modelowanie scalania

Do stacji scalającej (np. montażu) dochodzą detale z więcej niż jednej stacji, natomiast wychodzi z niej jeden detal. Na rysunku 5. przedstawiono n stacji, z których detale łączone są na stacji M_{n+1} .



Rys. 5. Stacja montażowa z n łączącymi się liniami

Niech d_i oznacza czas operacji na stacji M_i . Niech $u_i(k)$ ($i \leq n$) oznacza czas pojawienia się i -tego detalu w buforze wejściowym w k -tym cyklu. Dodatkowo, niech $t_{0,i}$ oznacza czas transportu i -tego detalu z magazynu wejściowego do stacji M_i , a $t_{i,n+1}$ oznacza czas transportu z M_i do M_{n+1} . Stąd, $x_i(k)$ (czyli czas rozpoczęcia operacji przez stację M_i), $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \leq n$ jest wartością maksymalną z:

- i -ty detal z bufora wejściowego u_i jest dostępny i przetransportowany do M_i ,
- zakończyła się $k - 1$ operacja na stacji M_i .

Natomiast $x_{n+1}(k)$:

- zakończyła się k -ta operacja na stacji M_i i detal został przetransportowany do M_{n+1} oraz
- zakończyła się $k - 1$ operacja na stacji M_{n+1} .

Zapisując to w formie równań, uzyskuje się zapis (16), (17) i finalnie (8), gdzie:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \\ x_{n+1}(k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1,n+1}d_{n+1} & t_{2,n+1}d_2 & & t_{n,n+1}d_n & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} t_{0,1} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & t_{0,2} & & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & & t_{0,n} \\ \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{bmatrix}.$$

Gotowy element dociera do magazynu końcowego $y(k)$, gdy zakończy się k -ta operacja na M_{n+1} i element ten zostanie przetransportowany do magazynu, czyli równanie wyjścia wyraża się równaniem (12), w którym $\mathbf{y}(k) = [y(k)]$, $\mathbf{C} = [\varepsilon \ \dots \ \varepsilon \ t_{n+1,n+2}d_{n+1}]$.

4.3. Modelowanie pojemności buforów międzyoperacyjnych

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że bufory międzyoperacyjne (przystanowiskowe) są *wystarczającej* pojemności. Zajmijmy się teraz modelowaniem systemów, w których takiego założenia przyjąć nie można.

4.3.1. Brak buforów

Załóżmy, że pomiędzy poszczególnymi stanowiskami nie ma żadnych buforów. Oznacza to, że detal ze stanowiska M_i trafia bezpośrednio na następne stanowisko M_{i+1} , jeśli jest ono wolne lub oczekuje na stanowisku M_i , aż M_{i+1} będzie gotowe do przyjęcia detalu. Do zilustrowania takiej sytuacji rozważmy ponownie system z rysunku 4. Materiał trafia do systemu w k -tej iteracji, więc jest on dostępny na stanowisku M_1 w czasie $t = u(k) + t_{0,1}$. Na M_1 można rozpocząć obrabiać nowy element, gdy zakończyła się poprzednia operacja na tym stanowisku, tzn. w czasie $t = x_1(k-1) + d_1$. Dodatkowo, stanowisko M_1 musi być gotowe na przyjęcie k -tego elementu, tzn. poprzedni detal już je opuścił, czyli wystartowała operacja na stanowisku M_{i+1} . Co przedstawia się następująco:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \begin{aligned} x_1(k) &= d_1 x_1(k-1) \\ &\oplus 0x_2(k-1) \oplus t_{0,1}u(k). \end{aligned} \quad (18)$$

Jeśli czas transportu detalu z M_i do M_{i+1} jest znaczący i wynosi $t_{i,i+1}$, wówczas M_i będzie gotowe zanim operacja na M_{i+1} się rozpocznie, a dokładniej w chwili $0 - t_{i,i+1}$, ponieważ można odliczyć sobie czas transportu. Czyli, dla $x_1(k)$:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \begin{aligned} x_1(k) &= d_1 x_1(k-1) \\ &\oplus -t_{1,2}x_2(k-1) \oplus t_{0,1}u(k). \end{aligned} \quad (19)$$

Zapisując równania w postaci (16) i (17), jedyną różnicą jest macierz \mathbf{A}_1 (a co za tym idzie i \mathbf{A}):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & -t_{1,2} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & d_2 & -t_{2,3} & & \varepsilon \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

4.3.2. Bufory o skończonej pojemności

Modelowanie buforów o skończonej pojemności jest rozszerzeniem przypadku braku buforów, tzn. jeśli pomiędzy M_i a M_{i+1} jest bufor o pojemności n , wówczas $\mathbf{A}_{n+1(i,i+1)} = 0$ (jeśli czas transportu $t_{i,i+1}$ jest znaczący, to $\mathbf{A}_{n+1(i,i+1)} = -t_{i,i+1}$). Modelowany system opisany jest równaniem:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k-1) \\ &\oplus \dots \oplus \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (20)$$

Podążając to, jak widać, zwiększa ilość macierzy w modelu, a po przekształceniu do modelu opisanego poprzez (16) i (17), znacząco zwiększa rozmiar macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} .

Można inaczej modelować pojemność buforów międzyoperacyjnych. Modelując bufor o pojemności n jako n maszyn o czasie operacji 0 z brakiem buforów pomiędzy tymi maszynami. Macierze modelu generowane w ten sposób są zwykle mniejsze niż w poprzednim podejściu.

Potrącając modelować wybrane klasy systemów produkcyjnych, można powrócić do rozważanego przypadku, zamodelować zachowanie systemu w poszczególnych konfiguracjach i na tej podstawie dokonać analizy i wyboru odpowiedniego rozwiązania.

5. Analiza przypadku cz. 2

Przed przystąpieniem do analizy poszczególnych konfiguracji linii produkcyjnej, zamodelowano następujące warianty dla każdej z 3 rozważanych konfiguracji:

- czas realizacji zamówienia składającego się z 10, 100 i 1000 sztuk;
- pojemność buforów: 0 (brak buforów), 1, 10 i *wystarczająca* (czyli nieskończona).

Po zamodelowaniu, okazuje się, że prawie wszystkie konfiguracje dają identyczny wynik – kolumna $y(k)$ z tabeli 2. Prawie, gdyż, jak widać, warianty z brakiem buforów międzyoperacyjnych dają dłuższe czasy realizacji zamówień dla konfiguracji nr 2 i nr 3. Stąd, można zdecydować się na dowolną konfigurację i dowolny wariant (poza dwoma ww. wariantami) lub zdefiniować dodatkowe kryterium wyboru. Jako dodatkowe kryterium przyjmijmy najmniejszy całkowity czas przestoju stanowisk produkcyjnych. Niech czas przestoju p_i stanowiska M_i w horyzoncie m cykli wyraża się wzorem:

$$p_i = \sum_{k=1}^m (x_i(k) - (x_i(k-1) + d_i)), \quad (21)$$

gdzie: $x_i(k)$ – czas rozpoczęcia k -tej operacji na stanowisku M_i , d_i – czas trwania operacji na stanowisku M_i , przy założeniu, że wyrażenie $(x_i(k-1) + d_i) = 0$ dla $k = 1$. Całkowity czas przestoju, definiowany jako suma czasów przestoju poszczególnych stanowisk (n liczba stanowisk):

$$p_C = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (22)$$

Tab. 2. Wyniki liczbowe uzyskane dla różnych konfiguracji i różnych wariantów buforów międzyoperacyjnych

	$k = 10$			$k = 100$			$k = 1000$		
	$y(k)$	p_c	pp_c	$y(k)$	p_c	pp_c	$y(k)$	p_c	pp_c
konfiguracja 1									
brak buforów	451	1364	43,21	4321	18014	59,56	43021	184514	6,27
buf. o poj. 1	451	927	29,36	4321	17455	57,71	43021	183955	61,08
buf. o poj. 10	451	706	22,36	4321	12983	42,92	43021	179483	59,60
nieskończone buf.	451	706	22,36	4321	6556	21,67	43021	65056	21,60
konfiguracja 2									
brak buforów	459	1071	38,89	4329	12591	48,47	43029	127791	49,50
buf. o poj. 1	451	687	25,38	4321	12199	47,05	43021	127399	49,36
buf. o poj. 10	451	413	15,26	4321	9447	36,49	43021	124647	48,29
nieskończone buf.	451	413	15,26	4321	3653	14,09	43021	36053	13,97
konfiguracja 3									
brak buforów	461	754	32,71	4331	8224	37,98	43031	82924	38,54
buf. o poj. 1	451	489	21,68	4321	7959	36,84	43021	82659	38,43
buf. o poj. 10	451	296	13,17	4321	6239	28,88	43021	80939	37,63
nieskończone buf.	451	296	13,13	4321	2546	11,78	43021	25046	11,64

Średni czas przestoju:

$$\bar{p}_C = p_C/n. \quad (23)$$

Wygodnym wskaźnikiem jest procentowa wartość czasu przestoju, czyli określony procentowo stosunek średniego czasu przestoju do czasu zakończenia zlecenia:

$$pp_c = (\bar{p}_C/y(m))100\%, \quad (24)$$

gdzie: $y(m)$ jest czasem zakończenia realizacji zlecenia (czas wyjścia m -tego detalu).

Po wprowadzeniu nowego kryterium wyboru, konfiguracja nr 3 jest preferowana, gdyż pomimo, iż zamówienie zostanie zrealizowane w tym samym czasie co dla pozostałych konfiguracji, w konfiguracji tej poszczególne stanowiska produkcyjne zwalniane są najszybciej. Dodatkowo, zwiększenie pojemności buforów międzyoperacyjnych jeszcze bardziej poprawia ten wskaźnik.

6. Podsumowanie

Projektowanie systemów produkcyjnych, ich analiza czy planowanie implikuje wiele skomplikowanych problemów analitycznych. W niniejszej pracy przedstawiono użyteczność (max, +) algebry w modelowaniu systemów produkcyjnych. Z uzyskanego modelu analitycznego, w łatwy sposób otrzymać można różnorakie wskaźniki ilościowe dotyczące efektywności funkcjonowania badanego systemu, będące pochodną realizacji procesów w czasie.

Algebra (max, +) jest wygodnym narzędziem do modelowania deterministycznych DES, w których czasy zdarzeń są stałe, stałe są również sekwencje operacji. Jest to również podstawowa wada tego narzędzia, które nadaje się do zastosowań dla węższej klasy systemów niż inne techniki modelowania DES, jak np. teoria automatów czy sieci Petriego. Niemniej posiada ona przewagę w postaci jednoznacznego modelu analitycznego, co pozwala na zrozumienie pewnych zjawisk czy optymalizację parametrów badanych systemów.

Prezentowany materiał jest wstępem do dalszych badań, przede wszystkim nad optymalną czy suboptymalną syntezą poszczególnych systemów jednoasortymentowych w system produkcji wieloasortymentowej. Do takich badań należy również rozwinąć narzędzia umożliwiające automatyczne generowanie modelu (max, +), aby przyspieszyć symulacje i obliczenia rachunkowe.

Literatura

- [1] Baccelli F., Cohen G., Olsder G.J., Quadrat J-P., *Synchronisation and Linearity, an Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley, 1992.
- [2] Cassandras C.G., Lafortune S., *Introduction to Discrete Event Systems*, Springer, 2007.
- [3] Cuninghame-Green R., *Minimax Algebra*. "Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems" 166/1979.
- [4] *Dorot Control Valves*, Materiały firmy Dorot. 2001, dostępny w Internecie <http://www.dorot.com/>.
- [5] Gross D., Shortie J.F., Thompson J.M., Harris C.M., *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley&Son, New Jersey, Hoboken 2008.
- [6] Heidergott B., Olsder G.J., van der Woude J., *Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems*. Princeton University Press, 2005.
- [7] Kashkoush M., El Maraghy H., *Consensus tree method for generating master assembly sequence*. "Production Engineering" 8/2014, pp. 233-242.
- [8] Limnios N., Oprošan G., *Semi-Markov Processes and Reliability*. Springer, 2013.
- [9] Maia C.A., Hardouin, L., Santos-Mendes R., Cottencau B., *Optimal Closed-Loop Control of Timed Event Graphs in Dioids*. "IEEE Transactions on Automatic Control" 12/2003, pp. 2284-2287.

- [10] Mutsaers M., Özkan L., Backx T., *Scheduling of energy flows for parallel batch processing using max-plus systems*. Mat. 8 IFAC Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, Singapore 2012.
- [11] Nambiar A.N., Imaev A., Judd R.P., Carlo H.J., *Production Planning Models using Max-Plus Algebra*. "Operations Management Research and Cellular Manufacturing Systems" 2012, pp. 227–257.
- [12] Petri C.A., *Kommunikation mit Automaten*. PhD Thesis. University of Bonn, Bonn 1962.
- [13] Ramadge P.J., Wonham W.M., *The Control of Discrete Event Systems*. "Proceedings of the IEEE" 77/1989, pp. 81–98.
- [14] Seleim A., El Maraghy H., *Max-Plus Modeling of Manufacturing Flow Lines*. Mat. 47 CIRP Conference on Manufacturing Systems (CMS2014), 17/2014, pp. 302–307.
- [15] Stańczyk J., *Max-Plus Algebra Toolbox for Matlab*. Ver. 1.7, 2016, dostępny w Internecie: <http://gen.up.wroc.pl/stanczyk/mpa/>.
- [16] Stańczyk J., Mayer E., Raisch J., *Modelling and Performance Evaluation of DES*. Mat. Int. Conf. Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO'04, 3/2004. pp. 270–275.
- [17] Van den Boom T., De Schutter B., *Properties of MPC for Max-Plus-Linear Systems*. "European Journal of Control" 5/2002, pp. 453–462.